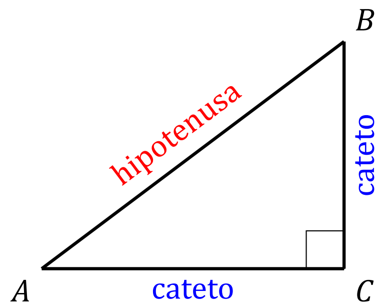
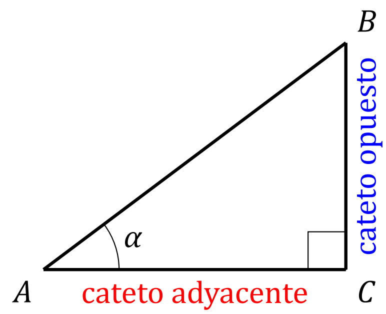
Funciones Trigonométricas

1 Funciones trigonométricas: Conceptos básicos

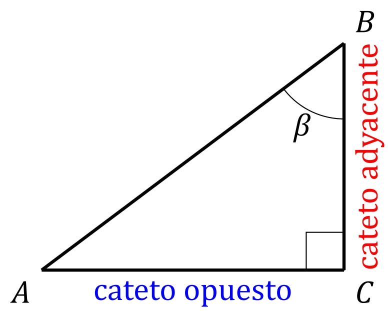
Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se le llama *hipotenusa* al lado que está opuesto al ángulo recto —siempre es el lado más largo. A los otros dos lados se les llama *catetos*.



Si consideramos el ángulo $\alpha = \angle BAC$, se llamará *cateto adyacente* al lado que forma el ángulo junto a la hipotenusa, y se llamará *cateto opuesto* al lado que no toca el ángulo.



Por supuesto, desde el punto de vista del ángulo $\beta = \angle ABC$, los catetos se invierten.



Es bueno recordar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre 180°. Como un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90°, se cumple que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 180^\circ - 90^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ \end{aligned}$$

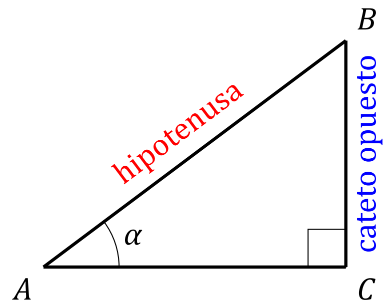
Esto quiere decir que tanto α como β miden a lo sumo 90°, o sea, son *ángulos agudos*.

2 Funciones trigonométricas: Definición

Se define el *seno* de un ángulo α, y se representa como $sen(\alpha)$ a la relación

$$sen(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Veamos de nuevo el triángulo $\triangle ABC$:



En este caso, la hipotenusa es el segmento $\overline{AB}$, y el cateto opuesto es el segmento $\overline{BC}$, por lo que el seno del ángulo $\alpha = \angle BAC$ sería

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Por lo general es necesaria una tabla o una calculadora para hallar los senos de los diferentes ángulos, pero hay algunos ángulos cuyos senos son más sencillos de memorizar. Los listamos a continuación.

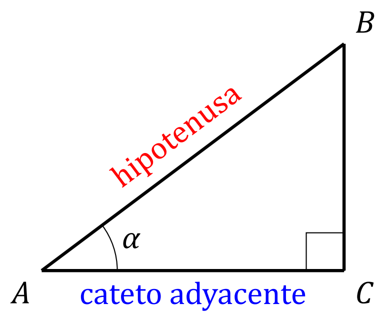
$$\begin{aligned} sen(0^\circ) &= 0 \\ sen(30^\circ) &= \tfrac{1}{2} \\ sen(45^\circ) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(60^\circ) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen(90^\circ) &= 1 \end{aligned}$$

Funciones Trigonométricas

De forma similar al seno, el *coseno* de un ángulo α, escrito $cos(\alpha)$, se define de la forma

$$cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Regresando al triángulo $\triangle ABC$, tenemos que



Por lo tanto, el coseno del ángulo $\alpha = \angle BAC$ sería

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Al igual que con el seno, el coseno tiene algunos valores que son importantes, y sencillos de memorizar:

$$\begin{aligned}
cos(0^\circ) &= 1 \\
cos(30^\circ) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
cos(45^\circ) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
cos(60^\circ) &= \tfrac{1}{2} \\
cos(90^\circ) &= 0
\end{aligned}$$

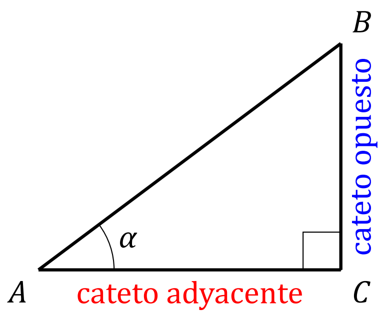
¿Notan alguna relación entre los valores notables del seno y del coseno? Si se fijan, verán que son los mismos valores, pero situados a la inversa. Esto es debido a una relación que exite entre las dos funciones, y que veremos un poco más adelante.

Funciones Trigonométricas

La tercera función trigonométrica es llamada *tangente* de un ángulo, y se representa como $tan(\alpha)$. Su fórmula es

$$tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Visualizándolo en el triángulo $\triangle ABC$:



Aquí, la tangente del ángulo $\alpha = \angle BAC$ sería

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

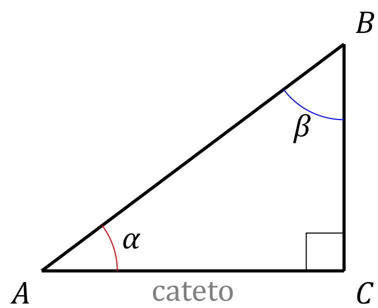
Los valores notables para la tangente son los siguientes:

$$\begin{aligned} tan(0^\circ) &= 0 \\ tan(30^\circ) &= \tfrac{\sqrt{3}}{3} \\ tan(45^\circ) &= 1 \\ tan(60^\circ) &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Noten que no se da un valor para la tangente de 90°. La razón para esto la veremos más adelante.

3 Funciones trigonométricas: Relación entre funciones

¿Recuerdan que mencionamos que, en un triángulo rectángulo, el cateto adyacente de un ángulo es el cateto opuesto del otro? Pues una consecuencia directa de esto, es que el seno de un ángulo es igual al coseno del otro ángulo. Veamos una ilustración de esta identidad:



En este caso, el lado $\overline{AC}$ es el cateto adyacente del ángulo $\alpha = \angle BAC$, y el cateto opuesto del ángulo $\beta = \angle ABC$. Esto quiere decir que

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = sen(\beta)$$

Recordemos además que

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

De aquí podemos despejar

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Sustituyendo entonces β en la identidad de arriba, tenemos que

$$cos(\alpha) = sen(\beta) = sen(90^\circ - \alpha)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, pero cambiando el cateto, podemos deducir que

$$sen(\alpha) = cos(\beta) = cos(90^\circ - \alpha)$$

Si revisamos los valores notables del seno y del coseno, veremos que estos están organizados a la inversa unos de los otros. Esto es precisamente consecuencia es estas igualdades que acabamos de ver.

Funciones Trigonométricas

Veamos una vez más las definiciones de seno y coseno:

$$sen(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

¿Qué pasará si dividimos el seno por el coseno? (Abreviamos los términos para que las fórmulas no se hagan demasiado engorrosas)

$$\begin{aligned} sen(\alpha) \div cos(\alpha) &= \frac{c.o.}{h.} \div \frac{c.a.}{h.} \\ &= \frac{c.o}{h.} \times \frac{h.}{c.a.} \\ &= \frac{c.o}{c.a.} \end{aligned}$$

Pero si vemos la definición de tangente, esta es precisamente

$$tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

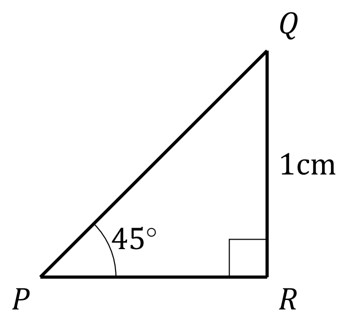
Ahora tenemos una nueva forma de definir la tangente a partir del seno y el coseno:

$$tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Ahora, como $cos(90^\circ) = 0$, y la división por cero no está definida, esto quiere decir que la tangente de 90° tampoco lo está.

4 Funciones trigonométricas: Ejemplo

En el triángulo rectángulo $\triangle PQR$, tenemos como datos el valor de un ángulo, y la longitud de uno de los lados.



Suponiendo que queramos hallar las longitudes de los otros dos lados, podemos proceder de la siguiente manera. Primero, notemos sólo conocemos el valor del ángulo $\angle QPR$, y el de su cateto opuesto. Las funciones trigonométricas que involucran el cateto opuesto son el seno y la tangente, y aunque podemos trabajar con cualquiera de las dos, en nuestro ejemplo utilizaremos el seno.

$$sen(45^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}$$

Luego buscamos el seno de 45° usando una calculadora o en una tabla (es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$), y sustituimos los valores que conocemos en la identidad.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1cm}{\overline{PQ}}$$

De aquí, podemos despejar $\overline{PQ}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \tfrac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{PQ} &= 1cm \\ \sqrt{2} \times \overline{PQ} &= 2 \times 1cm = 2cm \\ \overline{PQ} &= \tfrac{2cm}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}cm \end{aligned}$$

Funciones Trigonométricas

Para hallar $\overline{PR}$ podemos trabajar de manera similar con la tangente o, una vez calculado $\overline{PQ}$, podemos utilizar la fórmula del coseno. En nuestro ejemplo trabajaremos con la tangente:

$$\begin{aligned} tan 45^\circ &= \frac{1cm}{\overline{PR}} \\ 1 &= \frac{1cm}{\overline{PR}} \\ \overline{PR} &= \frac{1cm}{1} = 1cm \end{aligned}$$

Sólo faltaría saber cuánto mide el ángulo $\angle PQR$, pero para esto basta con restar $\angle PQR = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. De esta forma, podemos completar el triángulo $\triangle PQR$ como sigue: